E.N.I.T

Série 5 — Analyse Numérique

Exercice 1

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à coefficients complexes à n lignes et n colonnes.

1– Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Indication : On pourra choisir $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et considérer un indice i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, où x_j désigne la $j^{\text{ème}}$ composante de x dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2– On appelle spectre de A l'ensemble de toutes les valeurs propres de A noté $\mathrm{Sp}(A)$.
Montrer que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}; \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\}.$$

3– Montrer que si la matrice A est à *diagonale dominante stricte*, c'est à dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ , \quad \forall \ i = 1 \text{ à } n$$

alors A est inversible.

4– On veut résoudre le système linéaire

$$(S) \qquad Ax = b,$$

où $b \in \mathbb{C}^n$, par la méthode itérative de Jacobi. On suppose que A est à diagonale dominante stricte.

4–a Calculer la matrice J de la méthode de Jacobi .

4–b Montrer que la méthode de Jacobi est convergente.

Exercice 2

On se propose de résoudre numériquement le système linéaire : $Ax = b$.
Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit le système $Ax = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de relaxation.

Exercice 4

Soit le système $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1– Calculer la solution exacte par la méthode de Gauss.

2– Effectuer 5 itérations de la méthode de Jacobi, en initialisant avec $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

3– Effectuer 5 itérations de la méthode de Gauss-Seidel, en initialisant avec $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

4– Calculer le paramètre optimal de sur-relaxation, puis effectuer 5 itérations de la méthode de relaxation avec ce paramètre arrondi à 1 chiffre après la virgule, et en initialisant avec $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

Exercice 5

Soit $\alpha \in I\!R$ et soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1– Pour quelles valeurs de α, la matrice A est-elle définie positive ?

2– Montrer que pour tout $\alpha \in]-1/2, 1[$, la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0,2[$.

3– Ecrire la matrice J de la méthode de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de α, la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

4– Ecrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de la méthode de Gauss-Seidel correspondante. Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.

5– Pour quelles valeurs de α, la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?